Concours blanc

Option informatique, première année

Julien Reichert

Toutes les fonctions de ce devoir sont à écrire en Caml. Si la transcription en Caml d'un algorithme pose problème, il est cependant envisageable de l'écrire en pseudo-code.

Ce sujet rend hommage à un certain oral d'informatique fondamentale des ENS...

Recherche de minimum local

On s'intéresse au problème de la recherche d'un minimum local dans une structure de données. Un minimum local est un élément inférieur ou égal à tous ses voisins directs.

Exercice 1 : Prouver qu'une séquence (liste, tableau, etc.) finie non vide possède un minimum local[1]. Prouver aussi qu'une séquence infinie dont les éléments sont pris dans un ensemble bien fondé possède aussi un minimum local.

Exercice 2 : Écrire une fonction qui prend en entrée un tableau et qui retourne un indice d'un minimum local dans ce tableau.

Exercice 3 : Si cela n'a pas été fait à l'exercice précédent, réécrire cette fonction afin que la complexité soit logarithmique en la taille du tableau.

Exercice 4 : Écrire une fonction qui prend en entrée une liste et qui retourne un minimum local de cette liste. Il est interdit de passer par une structure de tableau. La complexité peut-elle être logarithmique ?

Exercice 5 : Écrire une fonction `minlocalfonction : (float -> float) -> float -> float -> float -> float` telle que `minlocalfonction f a b eps` retourne une abscisse entre `a` et `b` approchant un minimum local de `f` à `eps` près, en supposant que la fonction soit continue dans l'intervalle étudié et définie uniquement dans cet intervalle.

Exercice 6 : Écrire une fonction qui prend en entrée une matrice (type `'a vect vect`) et qui retourne un couple d'indices (ligne, colonne) d'un minimum local de cette matrice. On rappelle que le numéro de ligne est donné en premier et on considère qu'un élément d'une matrice a quatre voisins (trois au bord, deux dans un coin). Déterminer la complexité de la fonction.

Exercice 7 : Quelle serait la complexité si la matrice était écrite en tant que liste de listes ?[2] Envie de l'écrire ? Sérieusement ?

1. Ne riez pas, il m'a fallu une dizaine de secondes de trop pour répondre...
2. À ne surtout pas faire !

Exercice 8 : Si cela n'a pas été fait à l'exercice 6, écrire une fonction utilisant le paradigme diviser pour régner pour la recherche de minimum local dans une matrice. Il s'agit de diviser la matrice en quatre parties, d'étudier le cadre des quatre parties et d'en déduire laquelle de ces quatre parties est certaine de contenir un minimum local. Serait-il à ce sujet possible d'appliquer le même algorithme en restreignant l'étude à la croix séparant la matrice en quatre parties ?

Exercice 9 : Donner la complexité de l'algorithme en écrivant la complexité c_n pour une matrice à n lignes et n colonnes en fonction de $c_{\frac{n}{2}}$.

Exercice 10 : Adapter le calcul précédent à un algorithme alternatif (que l'on ne demandera pas d'écrire) divisant la matrice en deux horizontalement ou verticalement (au choix), et écrire la complexité c_m pour une matrice à m éléments en fonction de $c_{\frac{m}{2}}$.

Exercice 11 : On suppose maintenant que la matrice contient des booléens et on donne l'ordre `false < true`. Écrire une fonction de complexité la plus faible possible (à déterminer) déterminant la position d'un minimum local.

Exercice 12 : Finalement, la matrice contient des entiers naturels et on suppose que le maximum de la matrice est relativement faible par rapport à sa taille. Écrire une fonction de complexité linéaire en ce maximum et indépendante de la taille de la matrice déterminant la position d'un minimum local.